

Probabilités, L3

Université de Picardie Jules Verne
S6, 2021

Probabilités

martin legal @ u picardie fr

① Rappel sur les ensembles

Ensemble E : collection d'objets ("éléments")

$\leadsto$ appartenance : $x \in E$

$\leadsto$ inclusion : $F \subset E$ ($y \in E$ pour tout $y \in F$)

intersection : $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$

réunion : $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

complémentaire : $A \subset E \leadsto \bar{A} = A^c = \{x \in E : x \notin A\}$

différence : $A, B \subset E \leadsto A \setminus B = A \cap \bar{B} = \{x \in A : x \notin B\}$

différence symétrique : $A, B \subset E \leadsto A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B))$

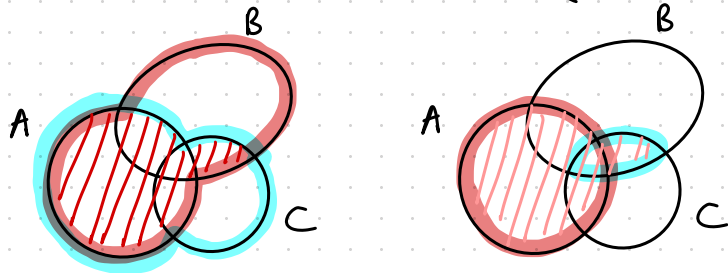
ensemble vide $\emptyset$

ensembles disjoints : $A, B \subset E$ t q. $A \cap B = \emptyset$

$\cup, \cap$ commutative & associative

$$\left(\begin{matrix} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{matrix} \right) \quad \left(\begin{matrix} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \end{matrix} \right) \text{ etc}$$

distributive $\downarrow \cup$ sur $\cap$. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



$\cap$ sur $\cup$. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ensembles usuels . $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^k_{k \geq 1}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}$ etc

1 Aléatoire

→ Modèle pour décrire des phénomènes dont on ne peut pas prévoir à priori le résultat mais t.q. si on fait un grand nombre d'expériences, on observe une certaine "régularité"

ex. lancer d'une pièce (1 tirage : impossible de savoir si "pile" ou "face")
grand nombre de tirages : moyenne $\approx 50\%$ "pile"

↳ **Espace d'états Ω** : ensemble de tous les résultats possibles

ex. pile ou face : $\Omega = \{p, f\}$
tirage de deux dés : $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$
durée de vie d'une lampe : $\Omega = \mathbb{R}_+$

↳ **Événement** : partie de Ω (événements élémentaires : singleton $\{\omega\}$, $\omega \in \Omega$)

Si $A \subset \Omega$, $\bar{A}$ est l'événement contraire de A

$A, B \subset \Omega$, $A \cup B$ = événement A ou B , etc
etc

Si $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les événements,

$\mathcal{A}$ est stable par c , $\cap$, $\cup$ et $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}$
($A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \begin{matrix} A \cap B \in \mathcal{A} \\ A \cup B \end{matrix} \in \mathcal{A}$ etc)

Probabilité. $A \in \mathcal{A} \rightsquigarrow P(A) \in [0, 1]$

(intuitivement, si on répète n fois la même expérience,
la fréquence $f_n(A)$ de A devant satisfaire $f_n(A) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(A)$)

Propriétés. (P0) $0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{A}$

(P1) $P(\Omega) = 1$

(P2) $\begin{matrix} A, B \in \mathcal{A} \\ A \cap B = \emptyset \end{matrix} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ex. a) $P(\emptyset) = 0$,

b) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

d) $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \in \{1, \dots, k\}$
 $P(A_1 \cup \dots \cup A_k) = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$

e) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Variable aléatoire.

fonction $X: \Omega \rightarrow E$ (en général $E = \mathbb{R}$)

transport de $P \rightsquigarrow P_X = \text{loi de la variable } X$.

$$P_X(F) := P\left(\underbrace{X^{-1}(F)}_{\in \Omega}\right), \quad F \subset E$$

$$X^{-1}(F) = \left\{ \omega \in \Omega \text{ tq } X(\omega) \in F \right\}$$

ex. $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (parties de Ω)

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{36} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}$$

On a $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

$$(i, j) \mapsto i+j = \text{"somme des 2 d'és"}$$

$$P_X(B) = \frac{\#\{(i, j) \in \Omega : i+j \in B\}}{36}$$

$$\left(P_X(2) = \frac{\#\{(1,1)\}}{36} = \frac{1}{36}, \quad P_X(4) = \frac{\#\{(1,3), (2,2), (3,1)\}}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \right)$$

etc

Déf. une probabilité sur Ω fme est une application

$$P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1] \text{ satisfaisant } (P1), (P2)$$

(a), (b), ..., (e) sont aussi satisfaits

Prop

a) une proba sur Ω finie est entièrement caractérisée par $\{p_\omega = P(\{\omega\}), \omega \in \Omega\}$

b) $\forall (p_\omega)_{\omega \in \Omega}$, $\exists!$ proba P t q. $P(\{\omega\}) = p_\omega$, $\forall \omega \in \Omega$, ssi

$$p_\omega \geq 0 \text{ et } \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

$$\left(A \subset \Omega \Rightarrow P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \text{ / } \text{conv. } \sum_{\emptyset} = 0 \right)$$

Def.

Ω finie $\leadsto$ P proba *uniforme* si $p_\omega = P(\{\omega\})$ est indépendant de $\omega \in \Omega$

$$\leadsto p_\omega = \frac{1}{\#\Omega}$$

$$\leadsto P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \forall A \subset \Omega$$

Loi hypergéométrique

Une urne contient B boules blanches
 N boules noires

$\leadsto$ Tirage **sans remise** / simultané de n boules ($n \in \llbracket 0, \dots, B+N \rrbracket$)

X : nombre de boules blanches ($n-X$: nombre de boules noires)

Ω : ensemble des parties à n éléments $\leadsto \# \Omega = \binom{B+N}{n}$

Si $0 \leq x \leq B$ et $0 \leq n-x \leq N$, $X^{-1}(\{x\})$ contient $\binom{B}{x} \binom{N}{n-x}$ éléments

$$\text{Loi} \leadsto P_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{\binom{B}{x} \binom{N}{n-x}}{\binom{B+N}{n}} & \text{si } \begin{matrix} 0 \leq x \leq B \\ 0 \leq n-x \leq N \end{matrix} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Loi binomiale

Urne identique (B boules blanches, N boules noires).

$\leadsto$ Tirage **avec remise** de n boules $\leadsto \Omega : \{1, \dots, B+N\}^n$, $\# \Omega = (B+N)^n$

X : nombre de boules blanches

$$\text{Loi. } p_X(x) = P(X=x) = \binom{n}{x} \left(\frac{B}{B+N}\right)^x \left(\frac{N}{B+N}\right)^{n-x}$$

$$0 \leq x \leq n$$

$$= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

où $p = \frac{B}{B+N}$ = proba de tirer une boule blanche à chaque étape

Loi binomiale de taille n et paramètre $p \in [0,1]$

$$\leadsto \mathcal{B}(n, p)$$

Loi binomiale comme limite de lois hypergéométriques

$B, N \gg 1$, $\frac{B}{B+N} \rightarrow p \in [0,1]$. tirage sans remise $\approx$ avec remise
 ($\rightarrow +\infty$) (peu de chances de retirer le même élément)

$$\begin{aligned} \frac{\binom{B}{x} \binom{N}{n-x}}{\binom{B+N}{n}} &= \frac{B!}{x! (B-x)!} \times \frac{N!}{(n-x)! (N-n+x)!} \times \frac{n! (B+N-n)!}{(B+N)!} \\ &= \binom{n}{x} \frac{[B(B-1) \cdots (B-x+1)] [N(N-1) \cdots (N-n+x+1)]}{(B+N)(B+N-1) \cdots (B+N-n+1)} \\ &\approx \binom{n}{x} \underbrace{\frac{B}{B+N} \times \cdots \times \frac{B}{B+N}}_{p \text{ } x \text{ fois}} \times \underbrace{\frac{N}{B+N} \times \cdots \times \frac{N}{B+N}}_{(1-p) \text{ } n-x \text{ fois}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

Définition générale

Si Ω n'est pas fini, les déf précédentes sont insuffisantes

ex. tirer pile ou face n fois $\leadsto \Omega = \{p, f\}^n$ et $P(A) = \frac{\#A}{2^n}$, $A \subset \Omega$

nombre infini de coups $\leadsto \Omega = \{p, f\}^{\mathbb{N}^*}$

$A =$ "on ne tire jamais pile" $\leadsto P(A) ?$

$A_n =$ "on ne tire jamais pile au cours des n premiers 'étaps'"

$$P(A_n) = \frac{1}{2^n}$$

$\leadsto$ on est tenté de poser $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$
(passage à la limite)

Ensemble dénombrable : en bijection avec $\mathbb{N}$ (ex. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ etc)
 $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^3$

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, n. $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$

propriétés : toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable
 I finie ou dénombrable, et A_i finie ou dénombrable pour $i \in I$
 $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ est finie ou dénombrable

$\Omega, \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ événements

Définition : $\mathcal{A}$ est une **algèbre** si

(A1) $\emptyset \in \mathcal{A}, \Omega \in \mathcal{A}$

(A2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \overline{A} \in \mathcal{A}$

(A3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}, A \cup B \in \mathcal{A}$ (stable par int / réunion finie)

$\mathcal{A}$ est une tribu si $(A1)-(A3)$ et $(A4)$ stable par int / réunion dénombrable :
(σ -algèbre)

$(A4)$ $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $A_n \in \mathcal{A}$ pour $n \geq 0$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

$$\left((A4) \Rightarrow (A3) \quad \begin{array}{l} A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \\ A \cap B \cap B \cap \dots = A \cap B \end{array} \right)$$

Def. • $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(\Omega) \rightsquigarrow \sigma(\mathcal{G}) =$ tribu engendrée par $\mathcal{G}$
 $=$ plus petite tribu contenant $\mathcal{G}$

existe toujours : $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu $\rightsquigarrow \sigma(\mathcal{G}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{G}' \text{ tribu} \\ \mathcal{G} \subset \mathcal{G}'}} \mathcal{G}'$

• $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tribu. un ensemble mesurable est un ensemble $A \in \mathcal{A}$.

ex .

$A = \{\emptyset, \Omega\}$ tribu grossière (plus petite tribu)

$$A \subset \Omega \rightsquigarrow \sigma(A) = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$$

$(A_i)_{i \in I}$ partition fine ou dénombrable de Ω $\left(\begin{array}{l} A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pour } i \neq j \\ \text{et } \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \end{array} \right)$

$$\sigma((A_i)_{i \in I}) = \left\{ B_J = \bigcup_{j \in J} A_j, J \text{ partie de } I \right\}$$

$\Omega = \mathbb{R}$ (ou espace topologique)

Tribu borélienne = tribu engendrée par la classe des ouverts de $\mathbb{R}$
 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Prop .

la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est aussi la tribu engendrée par les intervalles de la forme $] -\infty, a]$, $a \in \mathbb{Q}$

dém. $\mathcal{C}_1 =$ classe des int ouverts
 $\mathcal{C}_2 = \text{---}] -\infty, a] , a \in \mathbb{Q}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) =$ tribu borélienne

Tout ouvert $G \subset \mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'int ouverts :

$$G = \bigcup_{(q,n) \in B}]q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}[, \quad B = \left\{ (q,n) \mid q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \right. \\ \left. \text{et }]q - \frac{1}{n}, q + \frac{1}{n}[\subset G \right\}$$

Comme $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on déduit par (A4) que $\sigma(\mathcal{C}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Soit $]x,y[\subset \mathcal{C}_1$ et soit $(x_n)_n, (y_n)$ 2 suites de rationnels tq $x_n \nearrow x$
 $y_n \nearrow y$

$$\leadsto]x,y[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(]-\infty, y_n] \cap]-\infty, x_n]^c \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \text{ et } \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2).$$

strictement décroissant



De plus, tout fermé est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{C}_x \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$

donc $\sigma(\mathcal{C}_x) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_x) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ■

Def. une **probabilité** sur la tribu $\mathcal{A}$ de Ω est une application $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ t.q.
(même de probabilité)

(P1) $P(\Omega) = 1$

(P3) $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}, A_n \in \mathcal{A} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ t.q. } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ pour } m \neq n,$
(2 à 2 disjoint)
(axiome de σ -additivité)

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Propriétés: $P(\emptyset) = 0$: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, A_n = \emptyset \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{P(\emptyset)}_a = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P(A_n)}_a \Rightarrow a = 0$$

$$(P3) \Rightarrow (P2) \quad A, B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B = \emptyset$$

$$\leadsto A_1 = A, \quad A_2 = B, \quad A_3 = \dots = \emptyset$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P(A) + P(B) + 0 + \dots = P(A) + P(B)$$

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\bullet P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$$

$$P(A \cup B) \geq \max(P(A), P(B))$$

$$\bullet (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ suite croissante } (A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n \geq 0) \\ \Rightarrow (P(A_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ st croissante et } \lim_n P(A_n) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ suite } \searrow \\ \Rightarrow (P(A_n))_{n \in \mathbb{N}} \searrow \text{ et } \lim_n P(A_n) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right).$$

Def. Un **space de proba / space probabilisé** est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

où Ω est un ensemble, $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu, $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$
une probabilité

ex. $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda = \text{mesure de Lebesgue})$ $(\lambda([a, b]) = b - a, \quad a \leq b \in [0, 1])$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \delta_x = \text{masse de Dirac en } x$

$$(\delta_x(A) = 0 \text{ si } x \notin A$$

$$\delta_x(A) = 1 \text{ si } x \in A)$$

• $(\Omega \text{ fini}, \mathcal{P}(\Omega), P)$, P : équiréprobabilité. $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.

• $(\Omega = \{0, 1\}, \mathcal{P}(\Omega), P = \mathcal{B}(p))$ loi de Bernoulli de param $p \in [0, 1]$

$$P = p \delta_1 + (1-p) \delta_0$$

$$(P(0) = 1-p, \quad P(1) = p)$$

Prop. $\mathcal{A}$ tribu de Ω

On suppose que $P : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ vérifie (P1) et (P2).

On a équivalence des ppts suivantes :

(i) (P3)

(u) $P(A_n) \searrow 0$ si $A_n \searrow \emptyset$ et $A_n \in \mathcal{A}$

(iii) $P(A_n) \searrow P(A)$ si $A_n \searrow A$, $A_n \in \mathcal{A}$ ($\Rightarrow A \in \mathcal{A}$)

(iv) $P(A_n) \nearrow 1$ si $A_n \nearrow \Omega$ et $A_n \in \mathcal{A}$

(v) $P(A_n) \nearrow P(A)$ si $A_n \nearrow A$ et $A_n \in \mathcal{A}$ ($\Rightarrow A \in \mathcal{A}$)

dém.

(i) $\Leftrightarrow$ (v)

(i) $\Rightarrow$ (v)

$B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus B_{n-1}$ pour $n \geq 1$

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite disjointe et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = A$

$$\text{donc } P(A_n) = P\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) = \sum_{k=0}^n P(B_k)$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k) \underset{\substack{\uparrow \\ (P3)}}{=} P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) = P(A)$$

$$\text{donc } P(A_n) \nearrow_n P(A)$$

(v) $\Rightarrow$ (i). Soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, et à 2 disjointes

$$\text{on pose } B_n = \bigcup_{k=0}^n A_k, \quad B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

$$P(B_n) = \sum_{k=0}^n P(A_k) \quad \text{car } A_0, \dots, A_n \text{ disjointes}$$

$$\text{et } P(B_n) \nearrow P(B) \text{ d'après (v) car } B_n \nearrow B$$

$$\text{Mais } P(B_n) = \sum_{k=0}^n P(A_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) \text{ d'où } P(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$$

i.e. (P3)

$$(v) \Rightarrow (iv) \quad \text{par } A = \Omega \quad (P(\Omega) = 1)$$

$$(v) \Leftrightarrow (iii) \quad A_n \uparrow A \Leftrightarrow B_n \downarrow B \quad \text{où} \quad B_n = A_n^c \\ B = A^c$$

$$P(B_n) = 1 - P(A_n) \\ P(B) = 1 - P(A)$$

$$\text{donc} \quad P(A_n) \uparrow P(A) \Leftrightarrow P(B_n) \downarrow P(B)$$

$$(iii) \Rightarrow (i) \quad \text{par } A = \emptyset \quad (P(\emptyset) = 0)$$

$$\text{On a donc } (i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (v) \text{ et } (v) \Rightarrow (iv), \quad (iii) \Rightarrow (ii).$$

$$(ii) \Leftrightarrow (iv) : \text{en passant au complémentaire } (\Omega^c = \emptyset)$$

Il reste à montrer que $(iv) \Rightarrow (v)$ pour conclure.

Supposons (iv) et soit $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $A_n \nearrow A$

Soit $B_n = A_n \cup A^c$; $B_n \nearrow A \cup A^c = \Omega$

$$\text{et } (A_n \cap A^c) \subset (A \cap A^c) = \emptyset$$

$$\text{donc } P(B_n) = P(A_n) + P(A^c) = P(A_n) + 1 - P(A)$$

$$\text{Par (iv) } P(B_n) \nearrow P(\Omega) = 1$$

$$\text{d'où } P(A_n) + 1 - P(A) \nearrow 1,$$

$$\text{i.e. } P(A_n) \nearrow P(A), \text{ ce qui montre (v)}$$

